FLORIAN DUMITREL

Probleme de analiză matematică

pentru clasa a XI-a

ART
Grup Editorial

Cuprins

CAPITOLUL 1

Şiruri de numere reale

1.1. Să se determine marginile mulţimii $A = \{ \sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \}$.

G. Gussi

1.2. Un şir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere întregi este convergent dacă şi numai dacă este staţionar, adică există $n_0 \geq 1$ astfel încât $a_n = a_{n_0}$ pentru orice $n \geq n_0$.

1.3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ şi $(b_n)_{n \geq 1}$ două şiruri care, pentru orice $n \geq 1$, îndeplinesc condiţia

$$|a_n - b_n| \leq u_n \, |b_n| \,,$$

unde $(u_n)_{n \geq 1}$ este un şir de numere pozitive convergent la zero. Să se arate că $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă $(b_n)_{n \geq 1}$ este convergent şi, mai mult, cele două şiruri au aceeaşi limită.

1.4. Fie $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcţie injectivă şi $(a_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale.

a) Dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent, să se demonstreze că $\left(a_{\sigma(n)}\right)_{n \geq 0}$ este convergent şi

$$\lim_{n \to \infty} a_{\sigma(n)} = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

b) Dacă $\left(a_{\sigma(n)}\right)_{n \geq 0}$ este convergent, rezultă că $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent?

1.5. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale, astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} \left(a_n^3 + a_n + 1\right) = \infty$. Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$.

1.6. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcţie injectivă. Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = \infty$. Rămâne adevărată afirmaţia, dacă se înlocuieşte condiţia de injectivitate cu cea de surjectivitate?

1.7. Dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ este un şir crescător şi nemărginit superior (respectiv descrescător şi nemărginit inferior), atunci $a_n \to +\infty$ (respectiv $a_n \to -\infty$).

1.8. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale nemărginit superior. Să se arate că:

a) $(a_n)_{n \geq 1}$ conţine un subşir strict crescător;

b) $(a_n)_{n \geq 1}$ conţine un subşir cu limita $+\infty$.

1.9. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir mărginit. Să se demonstreze că, dacă toate subşirurile sale convergente au aceeaşi limită, atunci şirul este convergent.

1.10. Să se arate că şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ dat de $x_n = 2^n + 3^n$ nu conţine subşiruri în progresie geometrică.

Radu Gologan

1.11. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q} \setminus \{a\}$, $a_n \to a$. Dacă

$$a_n = \frac{p_n}{q_n}, \text{ cu } p_n, q_n \in \mathbb{Z},\ q_n > 0 \text{ şi } (p_n, q_n) = 1,$$

să se arate că $q_n \to \infty$.

1.12. Dacă un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lambda > 0,$$

să se arate că $a_n \to \infty$.

1.13. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 > 0$ şi $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{na_n}$ pentru $n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Sorin Micu

1.14. Să se arate că şirul $(\{\ln n\})_{n\geq 1}$ nu are limită, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

1.15. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} k\,\{\log_2 k\}$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x.

Florian Dumitrel

1.16. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit care are proprietatea

$$a_{n+1} - a_n \geq \sin\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n}$$

pentru orice $n \geq 1$. Să se arate că şirul este convergent.

Mircea Ganga

1.17. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi un şir $(x_n)_{n\geq 1} \subset (a, b)$ cu proprietatea

$$(x_{n+1} - a)(b - x_n) \geq \frac{(b-a)^2}{4}$$

pentru orice $n \geq 1$. Să se arate că şirul este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Valentin Matrosenco

1.18. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care şirul $(\sin n\alpha)_{n\geq 1}$ este convergent.

1.19. Să se arate că şirul $(\operatorname{tg} n)_{n\geq 1}$ nu are limită.

1.20. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale. Să se studieze natura şirului $([a_n])_{n\geq 1}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

1.21. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\ln n}{n}}$.

Nicolae Pavelescu

1.22. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

1.23. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+3n+2}\right\}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\}$,unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real a.

1.24. Fie $a, b\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a^2n^2+bn}\right\}$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x.

1.25. Să se arate că şirurile $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ şi $f_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n\geq 1)$ sunt monotone şi mărginite.

1.26. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}\right)^n$.

Constantin Caragea

1.27. Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general

$$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

1.28. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{C_n^k}{k}\right)^{\frac{1}{n}}$.

1.29. Pentru fiecare număr natural p notăm $a_n(p)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^p}{2^k}$. Să se arate că, pentru orice $p\in\mathbb{N}$, şirul $(a_n(p))_{n\geq 1}$ este convergent şi

$$L_0=1,\ L_1=2,\ L_p=2+\sum_{m=1}^{P-1}C_p^m L_{p-m},\ p\geq 2,$$

unde $L_p=\lim\limits_{n\to\infty}a_n(p)$.

1.30. Fie şirul $a_n=\frac{1}{C_n^0}+\frac{1}{C_n^1}+\ldots+\frac{1}{C_n^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Să arate că

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n\left(a_n-2\right)=2.$$

Cezar Apostolescu

1.31. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{n-k+1}}$.

Constantin Caragea

1.32. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică având raţia $r>0$ şi $x_1>0$. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)=\infty$;

b) şirul $\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+...+\frac{1}{x_n^2}\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

1.33. Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n$$

este strict descrescător şi mărginit.

1.34. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{x_{n+1}}-e^{x_n}\right)$, unde $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$, $n\geq 1$.

1.35. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k-1)}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2+2^2}+...+\frac{1}{1^2+2^2+...+n^2}\right)$.

1.36. Să se demonstreze identitatea lui Catalan

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\ (n\in\mathbb{N}^\star)$$

şi să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=\ln 2.$$

1.37. Fie $(a_n)_{n\geq 1}\subset(1,\infty)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\{xa_n\}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

Dan Popescu

1.38. Fie şirul $x_n=\sqrt[n]{a+\frac{1}{n}}$, $n\geq 2$, unde $a\in\mathbb{R}$, $a\geq 1$. Să se studieze monotonia şirului şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-1)$.

1.39. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} C_{2n}^{n} a^n (1-a)^n$, unde $a \in (0,1)$.

Dinu Şerbănescu

1.40. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$a_1 = 2 \text{ şi } na_{n+1} = (2n+2)\left(a_n + n\cdot 2^n\right),\ n \geq 1.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Traian Tămâian

1.41. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit descriptiv astfel:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$.

Mihai-Onucu Drâmbe

1.42. Se consideră un poligon regulat cu $2n$ laturi înscris într-un cerc de rază r şi se notează cu D_n suma lungimilor diagonalelor sale. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{D_n}{n^2}$.

Gabriel Coadă

1.43. Fie A o mulţime de numere reale cu cel puţin două elemente şi cu proprietatea

$$\forall\, x, y \in A,\ x \neq y \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in A.$$

Să se arate că oricare ar fi $a \in A$, există un şir $(a_n)_{n\geq 1} \subset A \setminus \{a\}$ convergent la a.

Florian Dumitrel

1.44. Fie $q \in \mathbb{R},\ 0 < |q| < 1$ şi $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit de numere reale. Să se arate că şirul

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q^k,\ n \geq 1$$

este convergent.

1.45. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale pozitive, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = 2\sqrt{a},\ a > 0.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

1.46. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ îndeplineşte condiţiile:

$$x_0 \in (0,1],\ 0 < x_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{x_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că şirul este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

O. Avramescu

1.47. Să se studieze convergența șirului $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin recurența:

$$a_0 \in \mathbb{R},\ a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1+a_n^2}.$$

Florian Dumitrel

1.48. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin egalitatea

$$a_n^3 + a_n + 1 = n.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (n^\alpha a_n)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.49. Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este definit prin egalitatea

$$x_n^3 + nx_n - a = 0,$$

unde $a > 0$ este fixat. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

1.50. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{2}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k$, este convergent.

Cezar Lupu

1.51. Fie șirurile $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1 = b_1 = 1$ și

$$a_{n+1} = b_n + \frac{1}{n},\ b_{n+1} = a_n - \frac{1}{n}$$

pentru orice $n \geq 1$. Să se arate că cele două șiruri nu au limită, dar șirul $(a_nb_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Laurențiu Panaitopol

1.52. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere reale, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 1 \text{ și } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+b_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Florian Dumitrel

1.53. Fie $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1} \subset (0,\infty)$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_nc_n = 1 \text{ și } \lim_{n\to\infty} (a_n^3 + b_n^3 + c_n^3) = 3.$$

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.

Cristinel Mortici

1.54. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = a > 1$ și $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$.

1.55. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1 \text{ și } 5^{x_{n+1}} = 4^{x_n} + 3^{x_{n-1}},\ n \geq 1.$$

Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

1.56. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un șir de numere reale definit prin

$$a_0 \in (0,1) \text{ și } 3^{a_{n+1}} = 2a_n + 1,\ n \geq 0.$$

Să se arate că șirul este convergent și are limita 1.

Florian Dumitrel

1.57. Fie $a > 0$ și $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = a + \frac{1}{x_n}.$$

Să se demonstreze că șirul este convergent și să se calculeze limita sa.

1.58. Fie funcția $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$ și $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}},\ n \in \mathbb{N}^*$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ x > 0$.

1.59. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_1 = a \text{ și } x_{n+1} = \frac{x_n}{1+\sqrt{1+x_n^2}}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n x_n$.

Dorinel Anca

1.60. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = 1 + n\sqrt{x_n},\ n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2}$.

Marian Ursărescu

1.61. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{1}{n} + \sqrt{a_n}$. Să se demonstreze că șirul este convergent și să se determine limita sa.

1.62. Fie $a \in (0,1)$, $(\lambda_n)_{n\geq 0} \subset [0,a]$ și un șir $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$$x_0, x_1 \in \mathbb{R},\ x_{n+1} = (1-\lambda_n)\, x_n + \lambda_n x_{n-1},\ n \geq 1.$$

Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Ion Savu și Tudor Spulber

1.63. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale, cu limita $a \in (-1,1)$. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} a_1 a_2 ... a_n = 0.$$

1.64. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)...(a_{n+1}-a_n).$$

Marin Toloşi

1.65. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent de numere reale care are limita x şi

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{2^n}\left(C_n^0 x_0 + C_n^1 x_1 + ... + C_n^n x_n\right),\ n \geq 1.$$

Să se arate că şirul $(\tilde{x}_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi are limita x.

1.66. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}-a_1| + |a_{n+1}-a_2| + ... + |a_{n+1}-a_n|}{n} = 0.$$

1.67. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir din $(0,1)$ convergent la zero. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_1^n + x_2^{n-1} + ... + x_{n-1}^2 + x_n\right) = 0.$$

1.68. Lema Stolz-Cesaro. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale cu proprietăţile:

i) $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi $y_n \to +\infty$;

ii) există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci şirul $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq 1}$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lambda$.

1.69. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} \dfrac{1}{\sqrt{ij}}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}$.

1.70. Să se arate că nu există nici o funcţie raţională $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

L. Vlaicu şi M. Tuska

1.71. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale convergente, cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \ldots + a_n b_{\sigma(n)}}{n} = ab,$$

unde $\sigma \in S_n$.

1.72. Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este o progresie aritmetică având raţia $r > 0$ şi $a_0 > 0$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_0\left(C_n^0\right)^2 + a_1\left(C_n^1\right)^2 + \ldots + a_n\left(C_n^n\right)^2}.$$

1.73. Fie $a_0 = 0$ şi $a_n = na_{n-1} + n!$, $n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$.

Florian Dumitrel

1.74. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} n\left(x_{n+1} - x_n\right) = 1.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

Viorel Lupşor

1.75. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 > 0$ şi $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$.

1.76. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$, $n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

Ion Drobotă

1.77. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_1 = a > 1 \text{ şi } x_{n+1} = \frac{n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n},\ n \geq 1.$$

Să se arate că şirul este convergent şi să se determine limita sa.

Lucian Tuţescu şi Toma Gheorghiev

1.78. Să se arate că $\sqrt[n]{k} \geq 1 + \frac{\ln k}{n}$ pentru orice $k, n \in \mathbb{N}^*$ şi apoi să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n} - n}{\ln n}.$$

1.79. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_1 = 1 \text{ şi } x_{n+1} = x_n + \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{x_n}{n}},\ n \geq 1.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

1.80. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin recurenţa

$$x_1 = 2,\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + \frac{x_n}{n}},\ n \geq 1.$$

a) Să se arate că şirul $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

Gh. Marchitan

1.81. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ are proprietăţile:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a_{n+1} - a_n\right) = a \in \mathbb{R}$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = b \in \mathbb{R}$.

Să se arate că $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

1.82. Fie $a_0 \in (0, \pi)$ şi $a_{n+1} = \sin a_n,\ n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} a_n$.

J. Dieudonné

1.83. Fie $p \in \mathbb{N}^*$ fixat şi un şir $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_{n+p} - x_n\right) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

Cosmin Niţu

1.84. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir cu proprietatea că şirul $(a_{n+1} - na_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n!}.$$

Marius Stănean

1.85. Fie $a_1 \in (0, 1)$ şi $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ pentru $n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_1 a_2 \ldots a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^n$.

1.86. Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$, cu $a_0 > 0$ şi $b_0 \in (0, 1)$, definite prin

$$a_{n+1} = a_n e^{-a_n} \text{ şi } b_{n+1} = b_n \cos\sqrt{b_n}.$$